Thierry DELORT 12 Aout 2019

9 rue MALTE BRUN

75020 PARIS

France

(INRIA-SACLAYS)

Email :tdelort@yahoo.fr

Titre :LE PROBLEME P=NP

RESUME :

Dans cet article, nous allons résoudre le problème P=NP pour un cas particulier de problèmes appelés « problèmes de détermination numérique basiques». Cette solution se généralise cependant à tous les problèmes de classe P et de classe NP. Nous allons proposer 3 Axiomes fondamentaux permettant de résoudre le problème considéré, ces Axiomes pouvant aussi être considérés comme des assertions de logique pure évidentes intuitivement et jamais contredites permettant de comprendre la solution du problème considéré. En effet, on verra que la conclusion de cet article permet de résoudre le problème considéré.

I)INTRODUCTION

Dans cet article nous allons donner une solution au problème P=NP. On sait que la conjecture P=NP (tout problème de classe P est de classe NP et réciproquement) n'a jamais été démontrée ni sa négation. Dans cet article nous allons proposer 3 assertions de logique pure intuitivement évidentes et jamais contredites, appelées pour cette raison « Axiomes », permettant de donner une solution au problème P=NP. On sait en effet que dans une théorie mathématique on peut introduire des Axiomes, ceux-ci devant être évidents ou avoir une justification intuitive évidente et jamais contredits. De plus, le fait qu'on n'ait jamais obtenu de résultats fondamentaux sur le problème P=NP en utilisant les théories mathématiques classiques conduit à penser que la solution du problème P=NP nécessite l'introduction de nouveaux Axiomes, et qu'elle ne peut pas être obtenue en utilisant seulement les théories mathématiques classiques. On ne considèrera qu'une catégorie de problèmes de classe P ou NP, appelés « problèmes de détermination numérique basiques», mais on peut immédiatement généraliser les Axiomes introduits résoudre le problème P=NP dans le cas général.

On définira dans cet article *un problème de détermination numérique basique*. Cette définition est importante car c'est une définition très générale de problèmes potentiellement de classe P ou NP, et aussi car elle donne une base concrète pour justifier intuitivement les Axiomes que nous allons introduire, et aussi pour tester leur validité.

Dans cet article, l'approche du problème P=NP est complètement nouvelle et n'utilise pas d'autres articles publiés sur le sujet. Néanmoins, sa conclusion est en accord avec tous les articles scientifiques sur ce sujet.

II)SOLUTION DU PROBLEME P=NP

A)PROBLEMES DE DETERMINATION NUMERIQUE BASIQUES (DEFINITION).

Par définition, *un problème de détermination numérique basique* contient les données suivantes :

-Un naturel n différent de 0.

-Un ensemble fini A(n) défini en fonction de n.

-Une fonction k(n) appartenant à $F(\mathbf{N},\mathbf{N})$ pouvant être constante.

-Dans certains cas, r ensembles finis $B_1,..,B_r$ (r naturel donné), avec pour i dans {1,..,r} B_i vérifie une proposition du type $P_{Bi}(B_i,A(n),n)$.

Par définition résoudre ce problème signifie trouver k(n) éléments distincts de A(n) vérifiant une proposition du type $P(a_1,\ldots,a_{k(n)},A(n),n,k(n), B_1,..,B_r)$, cette proposition faisant partie de la définition du problème de détermination numérique basique considéré.

(On aurait pu aussi généraliser cette définition en incluant dans celle-ci des problèmes analogues dans les quels k(n) n'est pas une donnée, mais dans lesquels on recherche une séquence $(a_1,..,a_s)$ la longueur de cette séquence étant déterminée par une proposition du type $P(a_1,\ldots,a_s,A(n),n,B_1,..,B_r)$,ou dans lesquels les a_i sont non nécessairement distincts).

On rappelle qu'on dira qu'un tel problème *appartient à la classe* P *ou est de classe* P si il existe un algorithme polynomial permettant pour tout naturel n d'obtenir au moins une séquence $(a_1,..,a_{k(n)})$ s'il en existe. Cet algorithme peut utiliser A(n),n, $B_1,..,B_r$. On dira alors qu'un tel algorithme est *un algorithme polynomial permettant de résoudre (ou résolvant)* le problème considéré.

On rappelle qu'on dira qu'un tel problème *est de classe* NP ou *appartient à la classe* NP si il existe un algorithme polynomial permettant pour tout n et pour tous naturels $a_{10},..,a_{k(n)0}$, appartenant à A(n), de déterminer si $P(a_{10},\ldots,a_{k(n)0},A(n),n,B_1,..,B_r)$ est vraie. Cet algorithme peut utiliser $a_{10},..,a_{k(n)0}$, A(n),n, $B_1,..,B_r$. On dira alors qu'un tel algorithme est *un algorithme polynomial permettant de vérifier* le problème considéré.

Il existe des problèmes de classe P ou de classe NP qui ne sont pas des problèmes de détermination numérique basiques mais ces derniers constituent l'essentiel des problèmes classiques intéressants de type P ou NP..

Par exemple on peut considérer le problème de détermination numérique classique consistant à chercher 2 diviseurs distincts a_1,a_2 d'un naturel n, s'ils existent.

On a alors $A(n)=\{1,..,n\}$, $k(n)=2$, et $P(a_1,a_2,n)$: « a_1 et a_2 sont 2 naturels distincts et différents de n et $a_1 \times a_2=n$ ».

Concernant l'exemple de l'Institut Clay (Pour lequel n=400), $A(n)=\{1,..,n\}$, $k(n)=n/4$ (ou 100), B_1 est un ensemble fini vérifiant $P_{B1}(B_1,A(n),n)$: « B_1 est un ensemble et $Card(B_1)=n/4$ (ou 100) et pour tout x élément de B_1, il existe b_1,b_2 éléments distincts de A(n) tels que $x=\{b_1,b_2\}$ »

Et $P(a_1,..,a_{k(n)},k(n),B_1)$: « Pour tous i,j distincts éléments de $\{1,..,k(n)\}$, $\{a_i,a_j\}$ n'est pas élément de B_1 ».

On rappelle que les 2 exemples de problème précédents sont de classe NP.

P=NP, pour les problèmes de détermination numérique basiques, signifie que tout problème de détermination numérique basique de classe P est de classe NP et réciproquement. Nous allons montrer que ce problème n'a pas de solution classique, c'est-à-dire :

-Si P=NP, il est impossible de le démontrer.

-Si P≠NP, il est impossible de le démontrer.

Dans ce qui suit on considèrera seulement des problèmes de détermination numérique basique.

B)IMPOSSIBILITE DE DEMONTRER P≠NP.

Pour prouver P≠NP, on doit montrer ou bien que P n'est pas inclus dans NP ou bien que NP n'est pas inclus dans P. Et donc on doit déterminer un problème de détermination numérique basique qui est de classe P mais pas de classe NP ou bien est de classe NP mais n'est pas de classe P.

Or on admet l'Axiome suivant :

Axiome 1 :

Il est impossible de prouver qu'un problème de détermination numérique n'est pas de classe P ou n'est pas de classe NP.

En effet, il n'existe pas d'Axiomes généraux permettant de prouver qu'un problème de détermination numérique basque n'est pas de classe P. Et donc, P_{DN} étant un problème de détermination numérique, pour montrer que P_{DN} n'est pas de classe P, on doit considérer tous les algorithmes polynomiaux et prouver qu'aucun d'eux ne permet de résoudre P_{DN}. Ceci est évidemment impossible. De plus cet Axiome 1 n'a jamais été contredit, on n'a jamais prouvé qu'un problème de détermination numérique basique n'était pas de classe P. La partie de l'Axiome relative aux problèmes de classe NP se justifie pareillement.

A cause de cet Axiome 1, il est impossible de prouver qu'un problème de détermination numérique est de classe P mais pas de classe NP ou bien est de classe NP mais

n'est pas de classe P et donc de prouver P≠NP pour les problèmes de détermination numérique basiques.

C)IMPOSSIBILITE DE PROUVER P=NP.

Pour prouver P=NP, on doit prouver que tout problème de détermination numérique basique de classe P est de classe NP et réciproquement.

Or on admet l'Axiome 2 suivant :

Axiome 2 :

Pour montrer qu'un problème de détermination numérique basique est de classe P (resp. de classe NP), on doit nécessairement donner un algorithme polynomial permettant de le résoudre (resp. de le vérifier).

Cet Axiome 2 est la conséquence du fait qu'il n'existe pas d'Axiomes généraux permettant de justifier qu'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre ou de vérifier un problème de détermination numérique basique. Ainsi, on n'a jamais prouvé qu'un problème de détermination numérique était de classe P autrement qu'en explicitant un algorithme polynomial le résolvant. Et donc, tout comme l'Axiome 1, il n'a jamais été contredit.

Une conséquence de cet Axiome 2 est l'assertion suivante, pouvant être aussi considérée comme sa seconde partie :

ASSERTION 1 :

Pour prouver NP est inclus dans P il est nécessaire de trouver un algorithme polynomial (général) permettant de résoudre tous les problèmes de détermination numérique basiques de classe NP.

On trouve une assertion analogue pour prouver P est inclus dans NP.

Or il sera toujours impossible de trouver un tel algorithme, (On a pas le début du commencement d'un tel algorithme) comme on l'admet dans l'Axiome 3 suivant :

Axiome 3 :

Il n'existe pas d'algorithme polynomial (général) permettant de résoudre tous les problèmes de détermination numérique basiques de classe NP.

Et donc on a prouvé qu'il était impossible de démontrer P=NP (même si c'est vrai), puisque pour démontrer P=NP on doit démontrer que P est inclus dans NP et NP est inclus dans P.

D)REMARQUE

On a donc montré en admettant les Axiomes précédents que même si on l'on a P=NP est vrai ou P≠NP, il est dans les 2 cas impossible de le démontrer.

On remarque cependant que si un problème de détermination numérique basique est de classe NP, on peut aisément obtenir un algorithme permettant de le résoudre (considérant chaque élément de A(n) et appliquant l'algorithme polynomial permettant de vérifier le problème). Mais l'algorithme obtenu n'est pas en général polynomial.

Notons qu'on peut aussi considérer les Axiomes 1,2,3 comme des assertions de logique pures qu'on peut admettre et qui peuvent permettre de résoudre le problème considéré.

III)CONCLUSION

On n'a pas montré que l'on a ni P=NP est vrai ni P ≠NP est vrai, mais on a montré qu'il est impossible de le démontrer dans les 2 cas. Ainsi s'il existe un problème de détermination numérique basique P_{DN} de classe NP et tel que pour tout algorithme polynomial Ag_p, Ag_p ne résout pas P_{DN}, alors P≠NP, mais ceci est impossible à démontrer d'après l'Axiome 1 et sa justification. Par contre, si pour tout problème de détermination numérique basique de classe NP (resp.P) P_{DN}, il existe un algorithme polynomial permettant de le résoudre (resp. de le vérifier), alors P=NP mais ceci est impossible à prouver d'après les Axiomes 2 et 3 et leur justification.

On a considéré seulement les problèmes de classe P ou NP qui étaient des problèmes de détermination numérique basiques, mais la solution qu'on a donnée se généralise à l'ensemble des problèmes de classe P ou NP (On généralise les Axiomes 1,2,3 remplaçant « problèmes de détermination numérique basiques» par « problèmes »). On remarque cependant que le fait qu'on ne puisse prouver P=NP pour les problèmes de détermination numérique basique entraîne qu'on ne peut aussi pas le prouver dans le cas général.

Il est aussi fondamental qu'on peut aussi considérer les Axiomes 1,2,3 non comme des Axiomes mais comme des assertions de logique pures évidentes et jamais contredites permettant de résoudre le problème considéré P=NP. On rappelle que dans une théorie mathématique on peut introduire des Axiomes, ceux-ci devant être évidents ou avoir une justification intuitive évidente et jamais contredits. De plus, le fait qu'on n'ait jamais obtenu de résultats fondamentaux sur le problème P=NP en utilisant les théories mathématiques classiques conduit à penser que la solution du problème P=NP nécessite l'introduction de nouveaux Axiomes, et qu'elle ne peut pas être obtenue en utilisant seulement les théories mathématiques classiques.

On rappelle que la définition d'*un problème de détermination numérique basique* est importante car c'est une définition très générale de problèmes potentiellement de classe P ou NP, et aussi car elle donne une base concrète pour justifier intuitivement les Axiomes que nous avons introduits, et aussi pour tester leur validité.

Notre preuve se généralise immédiatement au cas d'algorithmes non nécessairement polynomiaux, mais par exemple polynomiaux de degré inférieur à un naturel donné.

On n'a donc démontré ni P=NP ni P≠NP , mais on a néanmoins résolu le problème P=NP, de la même façon que la preuve qu'il n'existait pas d'algorithme permettant d'obtenir avec un compas la trissection d'un angle ou la quadrature du cercle résolvaient ces problèmes. La conclusion de cet article est bien en accord avec tous les articles scientifiques publiés dont le sujet est la problème P=NP.